LICENCIATURA EM MATEMÁTICA APLICADA À ECONOMIA E À GESTÃO

ÁLGEBRA LINEAR

DATA: 30 / Janeiro / 2018 Duração: 2 horas

Apresente todos os cálculos e justifique detalhadamente todas as respostas

1. Considere as seguintes afirmações:

(20) **(a)** Uma matriz $M \in \mathcal{M}_{n\times n}$ é invertível se e só se as suas linhas geram $\mathbb{R}^n$.

(20) **(b)** $\forall A \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ $\ det(\alpha A + I_2) = \alpha^2 \det(A) + \alpha\, tr(A) + 1$.

Para cada uma, investigue se é verdadeira ou falsa. Faça uma prova sucinta ou apresente um contraexemplo para justificar cada resposta.

2. Considere a aplicação $f: P_3(x) \longrightarrow P_4(x)$ definida por

$$f(ax^3 + bx^2 + cx + d) = (a + b + c)\,x^4 + (a - b - c)\,x^2 \qquad \forall\ ax^3 + bx^2 + cx + d \in P_3(x)$$

(20) **(a)** Mostre que f é uma aplicação linear.

(15) **(b)** Mostre que f não é injetiva.

(35) **(c)** Defina subespaço de $P_4(x)$. Apresente a imagem de f e mostre que ela é um subespaço de $P_4(x)$.

3. Considere a matriz $Q = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 & 0 \\ 4 & -4 & 2 & 2 \\ 4 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(20) **(a)** Apresente uma base para o espaço das colunas de Q.

(b) Considere a matriz B que resulta de Q eliminando a última coluna.

(20) **(b1)** Calcule os valores próprios de B.

(20) **(b2)** A matriz B é semelhante à matriz $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$? Porquê?

(30) **4.** Seja E um espaço vetorial de dimensão n. Mostre que se $f: E \to E'$ é uma aplicação linear que transforma vetores linearmente independentes em vetores linearmente independentes então f é injetiva.